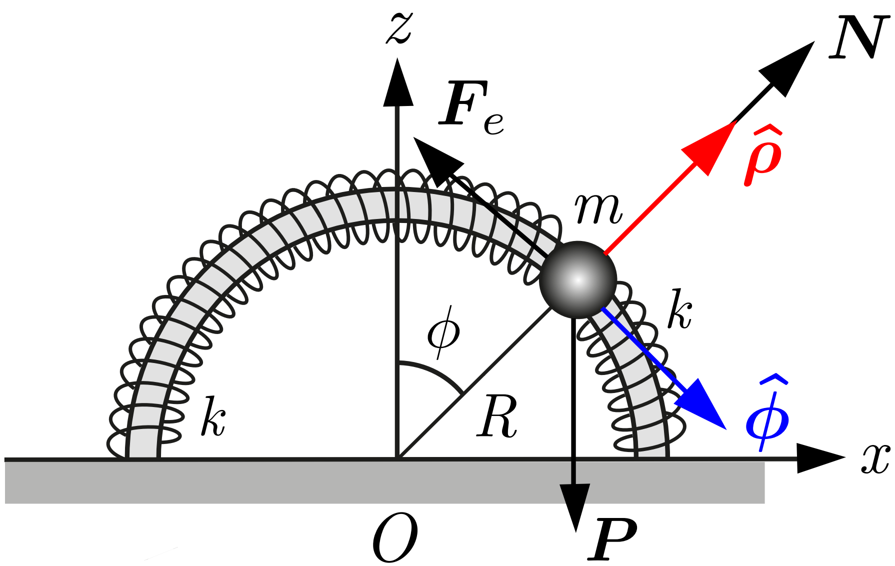
Applications - Chapitre 6

Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique

A.6.1 Métronome vertical



- On considère un métronome vertical constitué d'une masse m attachée à deux ressorts de constante élastique k chacun.
- La masse coulisse sans frottement sur un demi-cercle de rayon R. Le métronome est au repos lorsque l'angle ϕ est nul.
- Forces extérieures (plan vertical) :
  1. Poids :

$$ \tag{A.6.1} $$

  2. Réaction normale :

$$ \tag{A.6.2} $$

  3. Forces élastiques :

$$ \tag{A.6.3} $$

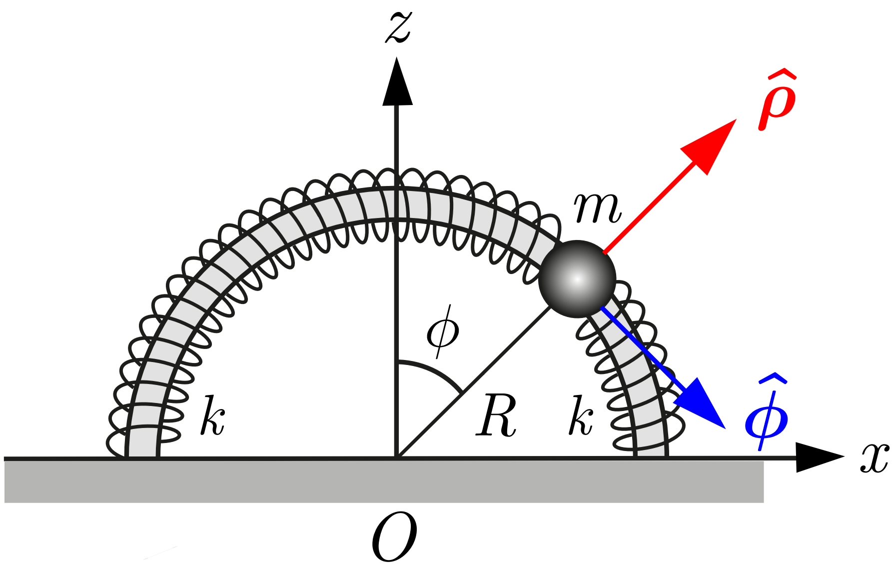
- Contrainte :

$$(A.6.4)$$

$\Rightarrow$

- Accélération : (coord. polaires)

$$(A.6.5)$$



- Loi du mouvement (masse) :

$$(A.6.6)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$: $$(A.6.7)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: $$(A.6.8)$$

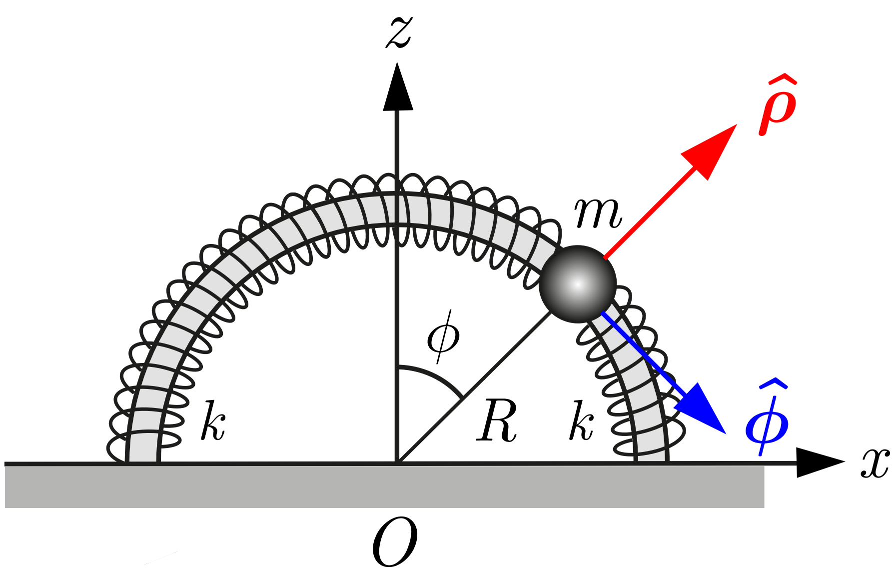
- Position d'équilibre :

$$(A.6.9)$$

$\Rightarrow$

$\xRightarrow{(A.6.8)}$

$\Rightarrow$ $$(A.6.10)$$



- Petites oscillations autour de la position d'équilibre (i.e. $\phi \ll 1$) :

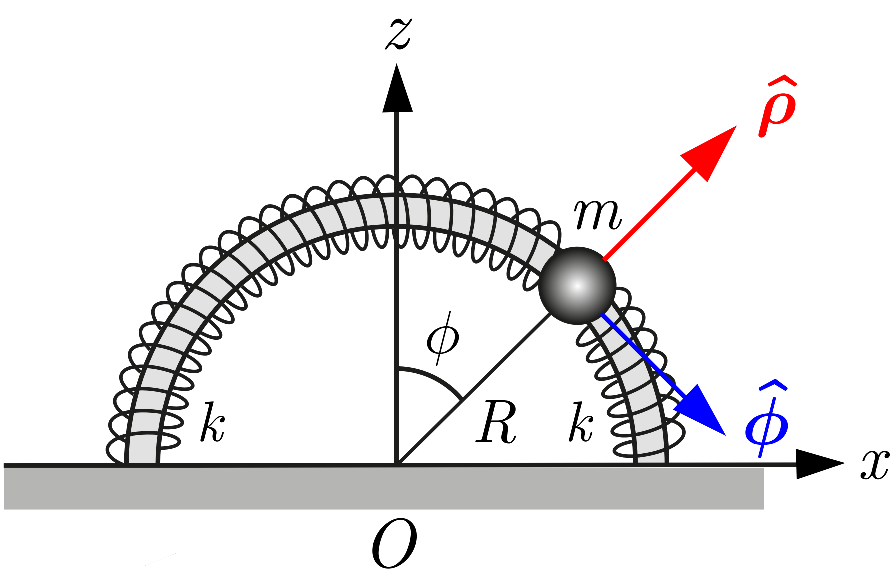
$$(A.6.11)$$

- L'équation du mouvement tangentiel $(A.6.8)$ se réduit à :

$$(A.6.12)$$

- Equation du mouvement tangentiel :

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{2\,k}{m} - \frac{g}{R} \right) \phi = 0 \qquad (A.6.12)$$



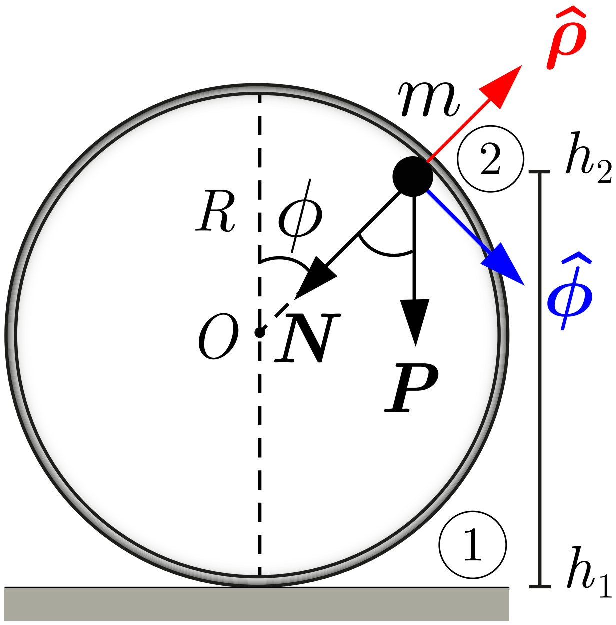
1. Si ⇒ petites oscillations :
2. Si ⇒ équilibre :
3. Si ⇒ masse m chute

A.6.1 Métronome vertical

A.6.2 Décrochement d'un rail circulaire

A.6.3 Pendule conique

- On cherche à déterminer l'angle de décrochement ϕ_0 du point matériel de masse m en fonction de sa vitesse v_1 en position (1) au bas du rail.



- On utilise la loi vectorielle du mouvement, le théorème de l'énergie cinétique et la condition de décrochement.

- Forces extérieures (plan vertical) :

  1. Poids :

$$(A.6.13)$$

  2. Réaction normale :

$$(A.6.14)$$

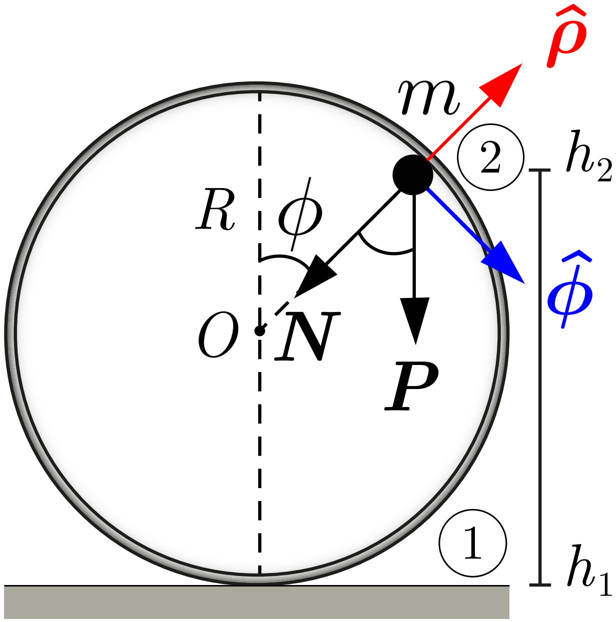
- Contrainte :

$$(A.6.15)$$

$\Rightarrow$

- Accélération : (coord. polaires)

$$(A.6.16)$$



- Loi du mouvement (masse) :

$$(A.6.17)$$

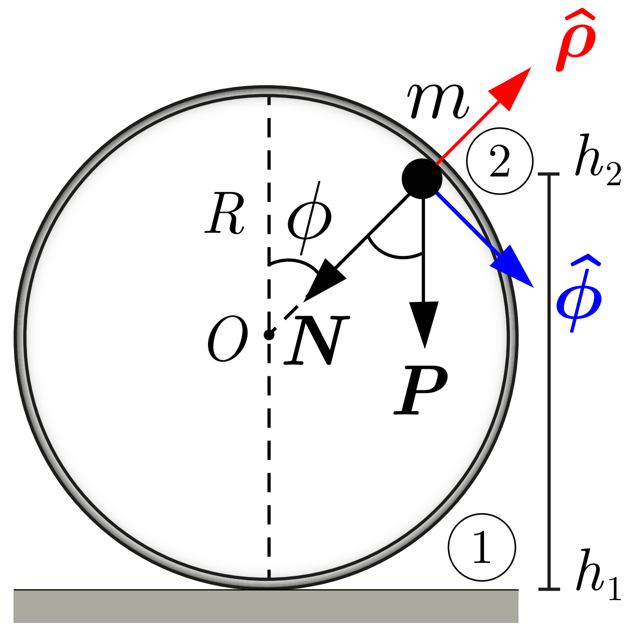
selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$: $$(A.6.18)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: $$(A.6.19)$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=} = \underbrace{\qquad\qquad}_{=}$$

$$= \qquad (A.6.20)$$



- Condition de décrochement :

$$(A.6.21)$$

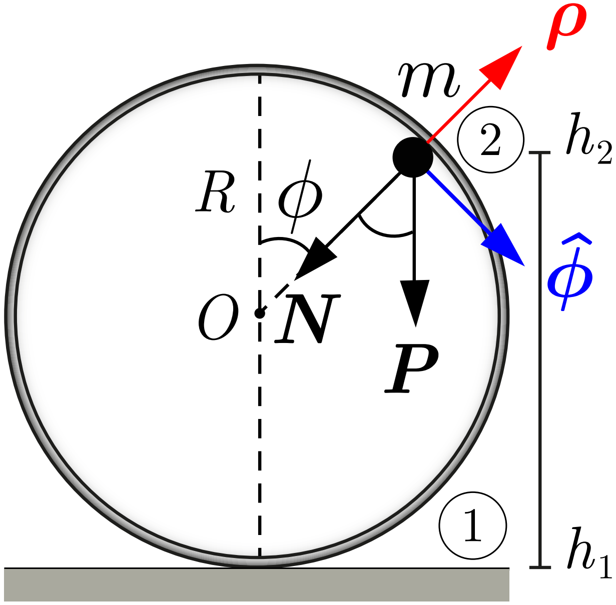
- Angle de décrochement 0 : $\phi \equiv \phi_0$ où $0 \leqslant \phi_0 \leqslant \pi/2$ $(A.6.22)$

$$(A.6.18) \quad \Rightarrow \qquad (A.6.23)$$

$$(A.6.20) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\qquad}_{=} - \quad = \qquad (A.6.24)$$

- $(A.6.23) \quad \Rightarrow \quad (A.6.24)$:

$$\Rightarrow \qquad (A.6.25)$$



- Décrochement (haut et droite) :

$$0 \leqslant \phi_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

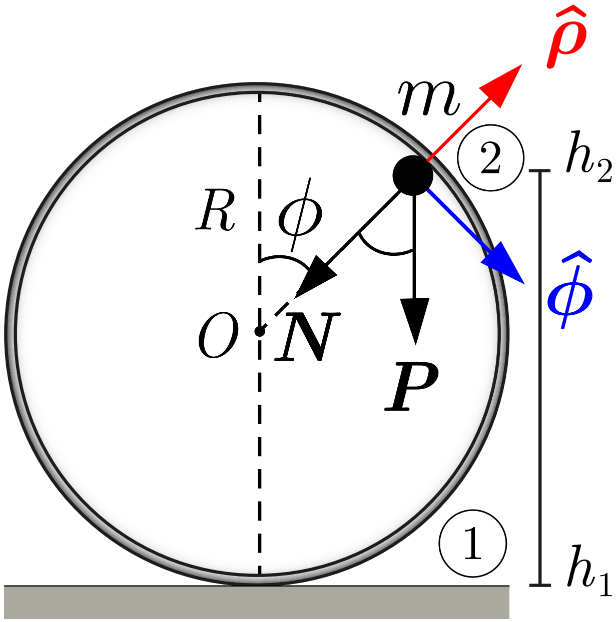
$$\Rightarrow \qquad (A.6.26)$$

- $(A.6.25) \quad \Rightarrow \quad (A.6.26)$:

$$\Rightarrow \qquad (A.6.27)$$

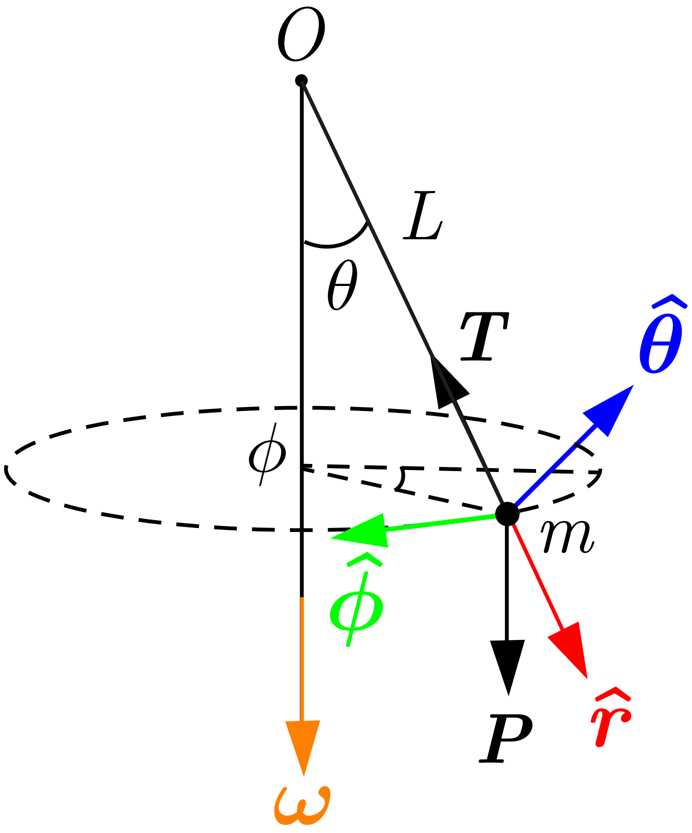
- Inégalité de décrochement :

$$2\,gR \leqslant v_1^2 \leqslant 5\,gR \qquad (A.6.27)$$



1. Si ⇒ pas de décrochement (bas)
2. Si ⇒ décrochement (haut)
3. Si ⇒ pas de décrochement (haut)

- On considère un pendule conique constitué d'un point matériel de masse m attaché à un fil de longueur L et de masse négligeable fixé au point O. Le fil est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{cste}$ autour d'un axe vertical dans le sens des aiguilles d'une montre.



- Soit θ l'angle entre le fil et l'axe vertical et ϕ l'angle qui repère la trajectoire du point matériel dans le plan horizontal.

- Forces extérieures (plan vertical) :

  1. Poids :

$$(A.6.28)$$

  2. Tension :

$$(A.6.29)$$

- Contraintes :

1. $$(A.6.30)$$

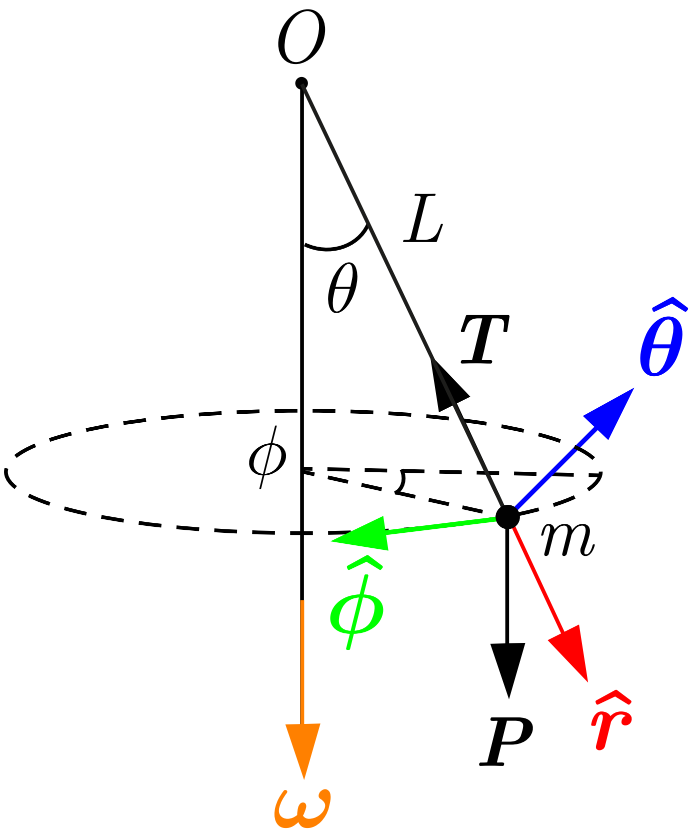
   $\Rightarrow$

2. $$(A.6.31)$$

   $\Rightarrow$

- Accélération : (coordonnées sphériques)

$$(A.6.32)$$



- Loi du mouvement (masse) :

$$(A.6.33)$$

selon $\hat{\boldsymbol{r}}$: $$(A.6.34)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$: $$(A.6.35)$$

selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: $$(A.6.36)$$

- Angle de nutation :

$$(A.6.36) \quad \Rightarrow \qquad (A.6.37)$$

- Tension :

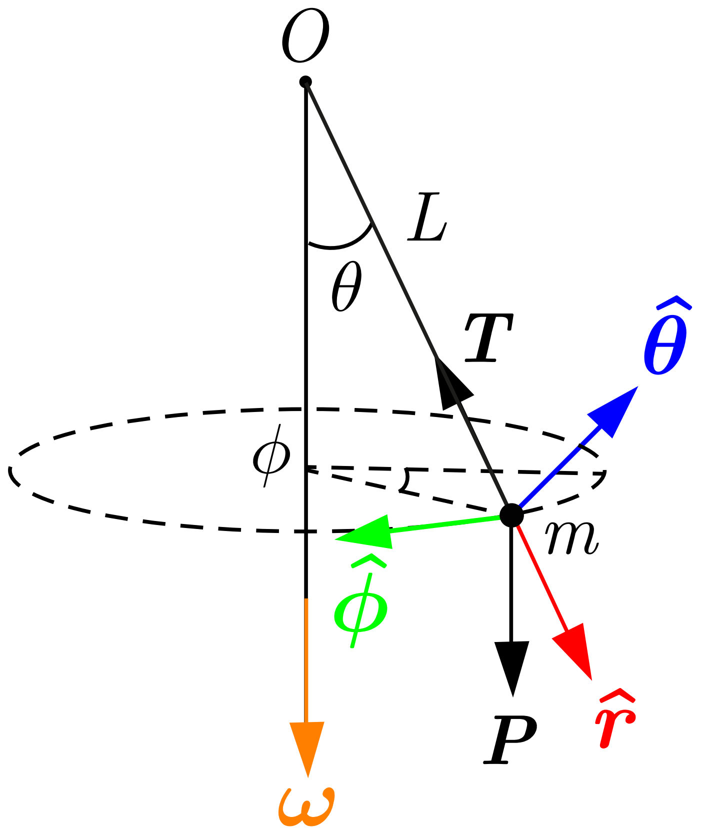
$$(A.6.34) \quad \text{et} \quad (A.6.37) \quad \Rightarrow \qquad (A.6.38)$$

- Equation du mouvement :

$$(A.6.37) \quad \Rightarrow \qquad\qquad \xRightarrow{(A.6.35)}$$

$$(A.6.39)$$

- On trouve les deux solutions en annulant les facteurs du membre de gauche de l'équation du mouvement $(A.6.39)$.



1.
2.

ssi